
UC-NRLF
$B 24 453



Über elliptische Polarisation bei Interferenz zweier monochromatischer bipolarer polarisierter Lichtwellensysteme.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

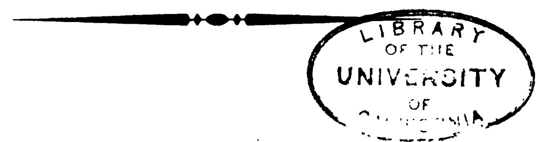
hohen philosophischen Fakultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Edmund Voigt,

Diplom-Ingenieur aus Berlin.



Rostock 1904.

Universitäts-Buchdruckerei von Adlers Erben, G. m. b. H.

Referent: Prof. Dr. phil. et med. L. Matthiessen.

Einteilung.



I.

Einleitung.

Huyghens (1629—1695) hat in seiner „Abhandlung über das Licht“[1]), in der er die Undulationstheorie aufstellte, gezeigt, dass aus verschiedenen Richtungen kommende Lichtstrahlen sich ungehindert kreuzen können[2]). Das Prinzip der Interferenz, dass bei Ineinanderschiebung von Lichtwellen an gewissen Stellen Aufhebung, an anderen Verstärkung eintreten kann, blieb ihm noch unbekannt.

Als Entdecker dieser Erscheinung kann mit Sicherheit Thomas Young (1773—1829) angesehen werden. Er scheint durch Heranziehung des akustischen Phänomens der Stösse auf seine Entdeckung geführt worden zu sein (1800). Aus seiner diesbezüglichen Abhandlung[3]) „Lecture on the Theory of Light and Colours“ mag folgende charakteristische Stelle zitiert sein:

„Since every particle of the medium is affected by each undulation, wherever the

[1]) Christian Huyghens: „Abhandlung über das Licht“ 1678. In deutscher Übersetzung von E. Lommel 1890, S. 17.

[2]) Ebenda S. 25.

[3]) Thomas Young: „Philosophical Transactions of the Royal Society of London“ 12. Nov. 1801, p. 34 l. 1 a. f.

directions coincide, the undulations can proceed no otherwise than by uniting their motions, so that the point motion may be the sum or difference of the separate motions, accordingly as similar or dissimilar parts of the undulations are coincident".

Bei Youngs Versuchen waren die Strahlen erst durch Beugung zur Interferenz gebracht. Da man aber über deren Natur noch wenig im Klaren war, so hielt man es später für nötig, nachzuweisen, dass diese Fähigkeit auch allen Strahlen zukommt. Aus diesem Grunde stellte Fresnel (1820) seine bekannten Spiegelversuche und auch den Versuch mit dem Doppelprisma an. Bei dem letzten Experimente werden die ungebeugten Strahlen durch Reflexion und durch Brechung abgelenkt und zur Interferenz gebracht.

Obwohl der Undulationstheorie durch das Interferenzprinzip eine grosse Stütze erstanden war, so stiess man doch bei der Erklärung der wichtigsten Erscheinungen auf grosse Schwierigkeiten, da man nämlich noch bei der Annahme verharrte, dass sich Lichtschwingungen ähnlich, wie die Schallwellen longitudinal fortpflanzen. Neben anderen komplizierten Vorgängen wusste man sich auch nicht die von Malus (1811) entdeckte Polarisationserscheinung, wonach ein Lichtstrahl nach verschiedenen Seiten hin verschiedenes Verhalten zeigt, zu deuten. Da wurden Fresnel und Arago durch ihre Untersuchungen über die Interferenz

des Lichtes zu dem wichtigen Resultat geführt, das Licht als transversale Schwingungen des Lichtäthers aufzufassen. Die Arbeiten dieser beiden Forscher über diesen Gegenstand sind in dem berühmten Werke Fresnels[4]) niedergelegt. An der gleichen Stelle finden sich auch weitgehende Untersuchungen, die auf mannigfaltige Experimente gestützt sind, über die Interferenz polarisierter Lichtwellen. Fresnel war auch der erste, der die Lichterscheinungen auf mathematischem Wege als Wellentheorie ausarbeitete. Seitdem sind die Interferenz- und Polarisationsvorgänge vielfach Gegenstand ausgedehnter, vor allem analytischer Betrachtungen geworden.

Es sei an dieser Stelle darauf aufmerksam gemacht, dass in verschiedenen neueren Schriften das Wort Interferenz nicht sinngemäss als Ineinanderschiebung gebraucht wird[5]) [6]).

Im Vorliegenden sollen die Polarisationserscheinungen bei der Interferenz zweier linear polarisierter Lichtwellensysteme, die von zwei Zentren ausgehen, untersucht werden. Der Stoff mag so geteilt werden, dass zuerst die Vorgänge mathematisch dargestellt werden, welche sich bei verschiedener Interferenz der beiden Systeme ergeben. Alsdann sind die Arten elliptischer Polari-

---

[4]) Augustin Fresnel: „Oeuvres complètes“ T. I. p. 385 e. s.

[5]) Wüllner: „Lehrbuch der Experimentalphysik“ 1899, Bd. IV S. 875 Z. 6 v. o.

[6]) Kirchhoff: Vorlesungen über math. Optik“ 1891, Bd. II S. 13 Z. 1 v. o.

sationsschwingungen, welche aus der Interferenz resultieren, analytisch und synthetisch festzustellen und die Bedingungen für spezielle Fälle aufzusuchen. Hieran mögen sich noch kurze Betrachtungen über die Polarisation auf charakteristischen Orten und endlich noch unter Berücksichtigung der Amplitudenänderung durch die Entfernung von den Zentren anschliessen.

II.

Darstellung der Interferenzen auf der Axe.[7])

Die Zusammensetzung der Lichtwellen geschieht nach dem Prinzip der Summierung und Differenzierung kleinster Bewegungen. In derselben Weise wird man hier vorgehen, um die Interferenz zweier linear polarisierter Lichtwellensysteme zu mathematischer Darstellung zu bringen. Dieses sogenannte Prinzip der Koexistenz kleinster Bewegungen bedeutet: Verlaufen Wellensysteme in der gleichen Ebene, und zwar so, dass auf jedes Molekül mehrere Impulse wirken, so erhält man die resultierende Bewegung jedes Punktes durch Anwendung des Parallelogrammes der Einzelbewegungen.

In der Lichtwellentheorie hat man es nun mit Schwingungen zu tun, die durch die Elastizität und Dichte des Äthers bedingt werden. Da diese Bewegungsart eine vollkommen harmonische ist, so hat man die Theorie der Schwingungen eines

---

[7]) Vgl. Matthiessen: „Vorlesungen über Theorie der Interferenzen" 1902.

elastischen Moleküls anzuwenden; sie führt zu der Zeitgleichung

$$y = a \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

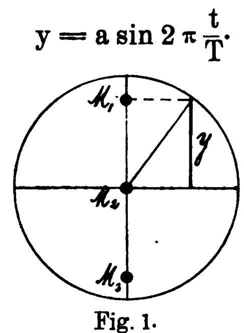


Fig. 1.

Hierin bedeuten

y die Deviation aus der Gleichgewichtslage.

a die Amplitude.

t die Zeit, während der das Molekül bereits in Bewegung begriffen ist.

T die Schwingungsdauer des Moleküls.

$2\pi \frac{t}{T}$ die Phase des betrachteten Punktes, also eine Winkelgrösse.

Bezeichnet man die Entfernung zweier in gleichem Schwingungszustande befindlicher Äthermoleküle als Wellenlänge λ, so ist das Bewegungsgesetz für einen um x vom Erregungszentrum entfernten Punkt P ausgedrückt durch

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Fig. 2.

Diese Gleichung ist die einer Welle in rechtwinkligen Koordinaten; sie soll unserer künftigen Betrachtung zugrunde gelegt werden.

Es mag die Annahme gemacht werden, dass die Wellenbewegung der beiden Systeme gleichzeitig von den Erregungszentren ausgehe, deren Distanz ein rationales Verhältnis zu der angenommenen Wellenlänge besitzt.

a. Gleichgerichtete Bewegung zweier Lichtwellenstrahlen mit gleichen Amplituden.

Unter der Voraussetzung monochromatischen Lichtes ist die Schwingungsdauer T für beide Systeme dieselbe. Da das Verhältnis der Wellenlänge zur Oszillationsdauer die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ausdrückt, so bewegen sich die beiden Wellenstrahlen, deren Wellenlängen bei monochromatischem Lichte gleich sind, im gleichen Medium mit gleicher Geschwindigkeit.

Es soll nun die Ineinanderschiebung zweier linear polarisierter Wellen, die sich nach derselben Richtung hin bewegen, zur Darstellung gebracht werden.

Haben die Erregungszentren C_1 und C_2 den Abstand d voneinander, so werden für irgend einen um x von C_1 entfernten Punkt die Einzeldeviationen durch folgende Gleichungen festgelegt:

$$y_1 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x-d}{\lambda}\right).$$

Für die wahre Entfernung des Punktes aus der Gleichgewichtslage gilt dann die resultierende Gleichung

$$Y = y_1 + y_2 = a\left[\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x-d}{\lambda}\right)\right]$$

$$= 2\,a \cos\frac{\pi d}{\lambda} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2x-d}{2\lambda}\right).$$

Die Struktur dieser Gleichung lässt erkennen, dass die Konstante $2\,a \cos\frac{\pi d}{\lambda}$ die neue aus beiden resultierende Amplitude ist. Die Welle verschwindet für die Amplitude O, d. h. wenn

$$\cos\frac{\pi d}{\lambda} = 0$$

ist. Das tritt ein für

$$d = \frac{2n+1}{2}\lambda,$$

wo n jede beliebige ganze Zahl bedeutet.

Die Amplitude wird also 0, wenn die Entfernung der Erregungszentren ein ungerades Vielfache der halben Wellenlänge ist. (Fig. 3.)

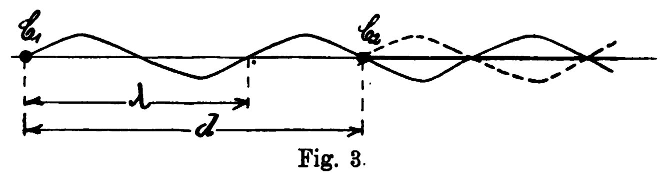


Fig. 3.

Das Maximum der Amplitude entsteht für

$$\cos\frac{\pi d}{\lambda} = 1,$$

d. h., wenn

$$d = n\lambda$$

ist. (Fig. 4.)

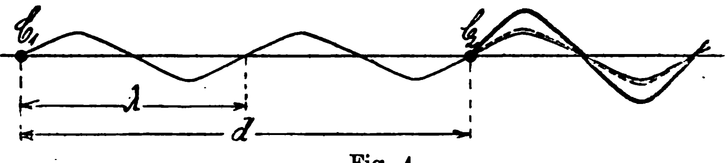


Fig. 4.

Da sich die Lichtwellen von den Erregungszentren nicht allein in gleicher Richtung bewegen, sondern auch zwischen den Zentren C_1 und C_2 in entgegengesetzter Richtung, so mögen zunächst die Interferenzerscheinungen für diesen Fall untersucht werden.

b. Entgegengesetzte Bewegung zweier Lichtwellenstrahlen mit gleichen Amplituden.

Unter den gleichen Annahmen und derselben Zeichenbedeutung, wie im vorigen Abschnitte, nur mit dem Unterschiede entgegengesetzter Ineinanderschiebung der Wellen, gelten für die Einzelverrückungen eines um x von C_1 entfernten Punktes die Gleichungen

$$y_1 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d-x}{\lambda}\right).$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man die Gesamtdeviation des betrachteten Punktes

$$Y = 2a \cos \pi \left(\frac{2x-d}{\lambda}\right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{2\lambda}\right).$$

Aus dieser Gleichung ersieht man, dass die Gesamtamplitude $2a \cos \pi \frac{2x-d}{\lambda}$ von x abhängig

ist, d. h. die Schwingungsweiten der einzelnen Moleküle sind verschieden. Da ferner das Argument der Sinusfunktion unabhängig von x ist, so hat man es nicht mit fortschreitenden, sondern mit stehenden Wellen zu tun. Das Charakteristische solcher Wellen besteht darin, dass ihre Berge und Täler nicht fortschreiten, sondern auf derselben Stelle mit einander wechseln.

Zur genaueren Beleuchtung der Gleichung empfiehlt es sich, die für verschiedene x resultierenden Amplituden hervorzuheben.

Die Gesamtamplitude

$$A = 2\,a \cos \pi \left(\frac{2\,x - d}{\lambda}\right)$$

wird 0, wenn

$$\cos \pi \left(\frac{2\,x - d}{\lambda}\right) = 0$$

ist, d. h.

$$\frac{2\,x - d}{\lambda} = \frac{2\,n + 1}{2}$$

oder

$$x = \frac{2\,n + 1}{4} \lambda + \frac{d}{2}.$$

Hiermit sind die Knotenpunkte der resultierenden Welle genau festgelegt.

Das Maximum der Amplitude tritt dagegen ein, wenn

$$\cos \pi \frac{2\,x - d}{\lambda} = 1$$

ist, d. h. wenn

$$x = n\,\lambda + \frac{d}{2}$$

ist. Demnach sind die Maximalamplituden 2 a oder als Wellentäler (— 2 a).

Bei den bisher angestellten Betrachtungen wurde angenommen, dass die aus beiden Zentren zur Interferenz kommenden Wellen ihre Amplitude beibehalten. Da nun aber die Lichtintensität dem Quadrat der Amplitude direkt und dem Quadrat der Entfernung von der Lichtquelle umgekehrt proportional ist, so ist klar, dass die Amplitude jeder Lichtwelle mit ihrem Wege kleiner wird. Es werden aber auch ferner in einem Punkte, dessen Abstände von den Zentren verschieden gross sind, nicht zwei Wellen mit genau gleicher Amplitude zusammentreffen. Da in jedem Augenblick die Intensität jeder der beiden Lichtwellen und somit auch die resultierende Amplitude einer Veränderung unterworfen ist, so ist es erforderlich, Gesetze aufzustellen, nach denen unter Annahme verschiedener zunächst konstanter Amplituden a_1 und a_2 die Gesamtamplitude A und die Gesamtdeviation Y rechnerisch und zeichnerisch bestimmt werden können.

c. Gleichgerichtete Bewegung zweier Lichtwellenstrahlen mit ungleichen Amplituden.

Für die Ineinanderschiebung zweier in derselben Richtung fortschreitender Wellen gelten unter Beibehaltung obiger Zeichen die Gleichungen

$$y_1 = a_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = a_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x-d}{\lambda}\right).$$

Die Gesamtdeviation ist also

$$Y = \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\left[a_1 + a_2 \cos 2\pi \frac{d}{\lambda}\right]$$

$$+ a_2 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \sin 2\pi \frac{d}{\lambda}.$$

Um daraus eine einfache Produktenform zu erhalten, mögen zwei Grössen A und D so bestimmt werden, dass

(1) $$a_1 + a_2 \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = A \cos 2\pi \frac{D}{\lambda}$$

und

(2) $$a_2 \sin 2\pi \frac{d}{\lambda} = A \sin 2\pi \frac{D}{\lambda}$$

gesetzt werden können.

Die so entstehende Summenform in ein Produkt verwandelt, gibt die Endgleichung

(3) $$Y = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x - D}{\lambda}\right).$$

Vor der weiteren Diskussion über diese Formel mögen erst die Amplitude A und der Gangunterschied D bestimmt werden.

Durch Summation der vorher einzeln quadrierten Gleichungen (1) und (2) ergibt sich ohne weiteres die Gesamtamplitude

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2\, a_1\, a_2 \cos 2\pi \frac{d}{\lambda}}.$$

Aus dieser Beziehung von A zu den bekannten Grössen ersieht man einmal, dass die resultierende Amplitude von der Entfernung d der beiden Erregungszentren abhängig ist und ferner, dass A sehr leicht durch folgende in Fig. 5 angegebene Konstruktion gefunden werden kann.

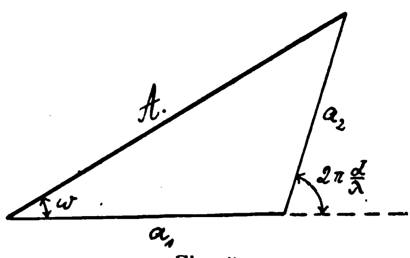


Fig. 5.

Wendet man auf dieses Dreieck den Sinussatz an, so kann man mit Kombination der obigen zweiten Bedingungsgleichung (2) sofort einen Wert für D ermitteln. Es ist nämlich

$$\sin \omega = \frac{a_2}{A} \sin 2\pi \frac{d}{\lambda} = \sin 2\pi \frac{D}{\lambda}.$$

oder

$$D = \frac{\omega \lambda}{2\pi}.$$

Man erkennt nun aus Gleichung (3), dass die aus den beiden Lichtwellen resultierende Welle wieder ein linear polarisierter Lichtstrahl ist, und dass sie dieselbe Schwingungsdauer T und dieselbe Wellenlänge λ besitzt. Dass auch eine fortschreitende Schwingung entsteht, ist aus der Abhängigkeit des Sinusarguments von t und x zugleich zu ersehen.

Das Minimum der Deviation, nämlich 0, tritt ein, wenn

$$\frac{t}{T} = \frac{x - D}{\lambda}$$

ist. Das Maximum

$$A = \pm 2a$$

hat statt, wenn

$$d = n\lambda$$

wird.

Ist die Distanz d ein ungerades Vielfache der halben Wellenlänge, also

$$d = \frac{2n+1}{2}\lambda,$$

so wird

$$A = a_1 - a_2;$$

die neue Amplitude ist die Differenz der beiden Einzelamplituden.

Um nun auch die zwischen den beiden Erregungszentren vorsichgehenden Interferenzerscheinungen unter Berücksichtigung der verschiedenen Amplituden betrachten zu können, muss in derselben Weise ein Gesetz für entgegengesetzte Ineinanderschiebung abgeleitet werden.

d. Entgegengesetzte Bewegung zweier Lichtwellenstrahlen mit ungleichen Amplituden.

Für diesen Fall gelten folgende Beziehungen

$$y_1 = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = a_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d-x}{\lambda}\right).$$

Nachdem die Differenzen der Funktionsargumente in Differenzen zweier Produkte verwandelt sind, erhält man durch Addition

$$Y = \sin 2\pi \frac{t}{T}\left(a_1 \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} + a_2 \cos 2\pi \frac{d-x}{\lambda}\right)$$

$$- \cos 2\pi \frac{t}{T}\left(a_1 \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} + a_2 \sin 2\pi \frac{d-x}{\lambda}\right)$$

Die beiden Klammerausdrücke sind wieder so zu bestimmen, dass

$$(1) \qquad a_1 \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} + a_2 \cos 2\pi \frac{d-x}{\lambda} = A \cos 2\pi \frac{D}{\lambda}$$

und

$$(2) \qquad a_1 \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} + a_2 \sin 2\pi \frac{d-x}{\lambda} = A \sin 2\pi \frac{D}{\lambda}$$

werde.

Dann ergibt sich die Gesamtdeviation

$$(3) \qquad Y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{D}{\lambda}\right).$$

Aus den beiden Bedingungsgleichungen (1) und (2) entsteht durch Quadrieren und Addieren

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2\, a_1\, a_2 \cos 2\pi \frac{2x-d}{\lambda}}.$$

Konstruktiv kann A ähnlich gefunden werden, wie im vorigen Falle; dagegen lässt sich für die Gangdifferenz D nicht eine so einfache Beziehung aufstellen, weil D sowohl, wie A diesmal von dem jeweiligen Abstand des Schwingungspunktes vom Zentrum abhängig sind.

Ein Blick auf die Gleichung (3) für die Gesamtdeviation zeigt wieder, wie im obigen Teil b., dass die resultierenden Wellen stehende Schwingungen ausführen. Da auch hier die Amplitude von x abhängig ist, so sind die Schwingungsweiten zwischen den Nullexkursionen verschieden. Es mögen wieder die einzelnen Amplituden hervorgehoben werden:

A wird 0, wenn

$$\cos 2\pi \frac{2x - d}{\lambda} = -\frac{a_1^2 + a_2^2}{2 a_1 a_2}$$

oder

$$\sin \pi \frac{2x - d}{\lambda} = \pm \frac{a_1 + a_2}{2\sqrt{a_1 a_2}}.$$

Unter dieser Bedingung wird die Gesamtamplitude 0; es entsteht also immer ein Knotenpunkt.

Die Amplitude hat ein Maximum, wenn

$$\cos 2\pi \frac{2x - d}{\lambda} = 1$$

ist. Dieser Fall tritt ein für die Entfernung

$$x = \frac{n\lambda + d}{2}.$$

Bis jetzt wurden nur die Fälle betrachtet, bei denen sich die Wellen in Richtung der Zentrallinie fortpflanzen. Im folgenden Abschnitt soll nun versucht werden, analoge Beziehungen für Schwingungspunkte ausserhalb der Axe abzuleiten.

III.

Darstellung der Interferenzen seitwärts im unbegrenzten Felde.

Um die Gleichung der Gesamtdeviation für irgend einen Punkt im Felde mit den Abständen e_1 und e_2 von den Erregungszentren aufzustellen, sind offenbar folgende zwei Gleichungen der Einzeldeviationen zu kombinieren:

$$y_1 = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e_1}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = a_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e_2}{\lambda}\right).$$

Nach trigonometrischer Umwandlung der Winkeldifferenzen findet man durch Addition die Gesamtausweichung aus der Nulllage.

$$Y = \sin 2\pi \frac{t}{T}\left(a_1 \cos 2\pi \frac{e_1}{\lambda} + a_2 \cos 2\pi \frac{e_2}{\lambda}\right)$$
$$- \cos 2\pi \frac{t}{T}\left(a_1 \sin 2\pi \frac{e_1}{\lambda} + a_2 \sin 2\pi \frac{e_2}{\lambda}\right).$$

Es mögen wieder zwei Grössen A und E so bestimmt werden, dass

$$a_1 \cos 2\pi \frac{e_1}{\lambda} + a_2 \cos 2\pi \frac{e_2}{\lambda} = A \cos 2\pi \frac{E}{\lambda}$$

und

$$a_1 \sin 2\pi \frac{e_1}{\lambda} + a_2 \sin 2\pi \frac{e_2}{\lambda} = A \sin 2\pi \frac{E}{\lambda}$$

werden.

Durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichung der Gesamtdeviation ergibt sich nach Umwandlung der entstehenden Differenz das Endresultat

$$Y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{E}{\lambda}\right).$$

Diese Gleichung hat ihre Gültigkeit für jeden Punkt im Felde. Die Gesamtamplitude A lässt sich aus den beiden Bedingungsgleichungen (1) und (2) ausdrücken, indem man erst jede Gleichung quadriert und dann beide addiert. Auf diese Weise erhält man

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2\, a_1\, a_2 \cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}}$$

Die konstruktive Darstellung ist unschwer zu erkennen und ist aus folgender Fig. 6 ohne weiteres ersichtlich.

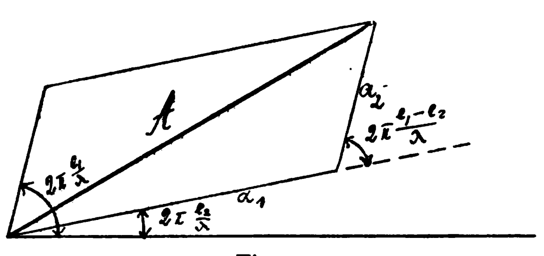


Fig. 6.

Bestimmen wir nun wieder die Berge und Knotenpunkte der resultierenden Welle.

Das Maximum der Amplitude

$$A = a_1 + a_2$$

tritt ein, wenn

$$\cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda} = 1$$



wird. Diese Möglichkeit besteht, sobald der Distanzunterschied

$$e_1 - e_2 = n\,\lambda,$$

gleich einer beliebigen Anzahl ganzer Wellenlängen ist.

Dagegen wird die Amplitude

$$A = O,$$

wenn

$$\cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda} = -\frac{a_1^2 + a_2^2}{2\,a_1\,a_2}$$

ist oder

$$\sin \pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda} = \pm \frac{a_1 + a_2}{2\sqrt{a_1\,a_2}}.$$

Es ist an dieser Stelle noch von Interesse, zu untersuchen, unter welcher Bedingung die Amplitude gleich der Differenz der Einzelamplituden wird. Dieser Fall tritt ein, sobald

$$\cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda} = -1$$

wird, d. h.

$$e_1 - e_2 = \frac{2n+1}{2}\,\lambda$$

oder in Worten, sobald der Entfernungsunterschied gleich einer ungeraden Anzahl halber Wellenlängen ist.

IV.

Erörterungen zu der graphischen Darstellung. Ermittlung der Interferenzkurven völliger Aufhebung.

Von den beiden Erregungszentren C_1 und C_2 (Blatt I. Fig. 7), die um 3 ganze Wellenlängen voneinander entfernt sein mögen, breiten sich die Lichtwellenstrahlen gleichgerichtet und in entgegengesetzter Richtung aus. Jede Welle ist als eine Sinuslinie dargestellt, sodass die Zeichenebene als Schwingungsebene angesehen werden kann. Man erkennt in dieser Darstellung die Richtigkeit der oben mathematisch gefundenen Wahrheiten, dass ausserhalb der Erregungszentren fortschreitende, dagegen innerhalb derselben stehende Wellen entstehen.

Da man an Hand dieser Verbildlichung des vorliegenden Theorems aber nur die Vorgänge auf der Axe betrachten kann, so ist auf demselben Blatt eine andere Darstellung gegeben, aus welcher sich sämtliche Fälle einer Untersuchung unterziehen lassen.

Von den Erregungszentren ausgehend ist die Ausbreitung der beiden Lichtwellensysteme so wiedergegeben, dass die Wellenberge durch stark

ausgezogene Kreise, die Wellentäler durch dünn ausgezogene Kreise dargestellt sind.

In den Punkten, in denen ein Berg der einen mit einem Tal der anderen Lichtwelle aufeinanderstossen, tritt bei gleichen und konstanten Amplituden offenbar eine völlige Vernichtung ein. Sind beispielsweise für einen derartigen Interferenzpunkt P auf der Axe die Entfenungen von den Zentren e_1 und e_2 und sein Abstand vom Mittellot der Zentrale b, so ist für diesen Punkt

$$e_1 = \frac{d}{2} + b$$

$$e_2 = \frac{d}{2} - b.$$

$$e_1 - e_2 = 2\,b = \frac{3}{2}\,\lambda.$$

Nach Ausbreitung beider Wellen um eine halbe Wellenlänge kommen sie in P' zu gleicher Interferenz, und es ergibt sich für die Differenz der Entfernungen von den Zentren wieder derselbe Wert $\frac{3}{2}\,\lambda$. Aus dieser Konstanz des Distanzunterschiedes von zwei festen Punkten C_1 und C_2 erkennt man, dass all diese Interferenzpunkte völliger Aufhebung auf einem Hyperbelaste liegen. Diese sämtlichen Interferenzkurven sind in der Zeichnung mit ungeradzahligen Indices bezeichnet; ihre Brennpunkte liegen in den Erregungszentren.

Betrachtet man weiter P', so erkennt man, dass für ihn die Summe der Entfernungen

$$e_1 + e_2 = 4\,\lambda$$

ist. Dasselbe gilt aber auch für einen danebenliegenden um $\frac{1}{2}\lambda$ entfernten Interferenzpunkt P″. In dieser Weise könnte man die Betrachtung weiter fortführen, mit dem Ergebnisse, dass derartige Interferenzpunkte auf einer Ellipse liegen. Da all diese Ellipsen auch die Erregungszentra als Brennpunkte haben, so bilden sie mit den Interferenzhyperbeln konfokale Kegelschnittkurven.

Es entsteht nun die Frage, ob für jeden Punkt auf diesen Interferenzkurven, ebenso wie für das Zusammentreffen eines Berges mit einem Tal völlige Aufhebung der beiden Wellen stattfindet. Zur Beantwortung dieser Frage muss man feststellen, in welchen Bahnen die Ätherteilchen in den betrachteten Interferenzpunkten schwingen.

V.

Ableitung der Bahngleichung für resultierende Schwingungskurven und der Bedingungsgleichungen für elliptische Polarisation.

Da die Wellen unter verschiedenen Richtungen aufeinanderstossen, so ist es nötig, ein Gesetz abzuleiten, aus dem für jeden beliebigen Punkt die aus den Einzeldeviationen resultierende Bewegungsform erkannt werden kann. Es bestehen folgende Beziehungen

$$y = a_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{e_1}{\lambda}\right)$$

$$z = a_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{e_2}{\lambda}\right).$$

Setzt man

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{e_1}{\lambda}\right) = \varphi$$

und

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{e_2}{\lambda}\right) = \varphi - \psi$$

also

$$\psi = 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda},$$

so wird

$$\sin\varphi = \frac{y}{a_1}$$

$$\sin(\varphi - \psi) = \frac{z}{a_2}$$

Verwandelt man die linke Seite der zweiten Gleichung in die Differenz zweier Funktionsprodukte und kombiniert mit der ersten Gleichung, so entsteht

$$\frac{z}{a_2} = \frac{y}{a_1} \cos \psi - \sqrt{1 - \frac{y^2}{a_1^2}} \sin \psi.$$

Durch Quadrieren erhält man

$$\frac{y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{a_2^2} - 2 \frac{yz}{a_1 a_2} \cos \psi = \sin^2 \psi.$$

Setzt man wieder den ursprünglichen Wert für ψ ein, so entsteht als Endresultat

$$(1) \quad \frac{y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{a_2^2} - 2 \frac{yz}{a_1 a_2} \cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda} = \sin^2 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}.$$

Dies ist die allgemeine Gleichung der resultierenden Schwingungskurven. Sie kann benutzt werden, um für jeden beliebigen Punkt durch Einsetzen der jeweiligen Phasendifferenz die Bewegungsform der Äthermoleküle abzuleiten.

Da die Gleichung (1) aber einem schiefwinkligen Koordinatensysteme angehört, so mag sie erst auf ein rechtwinkliges Axenkreuz transformiert werden. (Fig. 8).

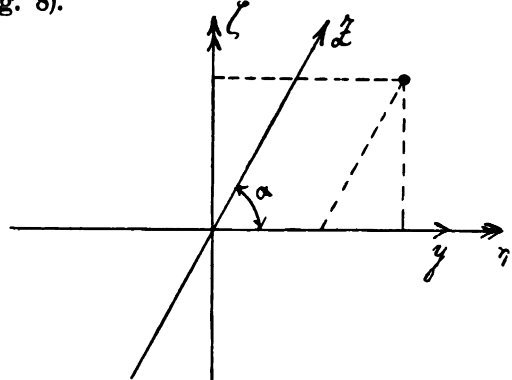


Fig. 8.

Schiefwinklige Koordinaten y und z.
Rechtwinklige Koordinaten η und ζ.

Es ist zu setzen

$$y = \eta - \zeta \operatorname{ctg} \alpha$$

$$z = \frac{\zeta}{\sin \alpha}$$

Führt man diese neuen Koordinaten in (1) ein, so entsteht

$$(2) \quad \left(\frac{\eta}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{2\zeta\eta}{a_1^2} \operatorname{ctg} \alpha$$

$$+ \left(\frac{\zeta}{a_2}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{2\zeta\eta}{a_1 a_2} \frac{\cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}}{\sin \alpha}$$

$$+ \frac{2\zeta^2}{a_1 a_2} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}$$

$$= \sin^2 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung sollen nun die Bedingungsgleichungen für die verschiedenen Schwingungsbahnen festgestellt werden.

Die Gleichung (1) stellt eine Gerade dar, wenn sie in die Form

$$\frac{\eta^2}{a_1^2} + \frac{\zeta^2}{a_2^2} \pm \frac{2\eta\zeta}{a_1 a_2} = \sin^2 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}$$

oder

$$(3) \qquad \frac{\eta}{a_1} \pm \frac{\zeta}{a_2} = \sin 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}$$

übergeht.

Ein Vergleich dieser Gleichung mit der Bahngleichung (2) ergibt folgende zwei Bedingungsgleichungen



(I.) $$\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2 \sin^2 \alpha} + \frac{2 \cos \alpha \cos 2 \pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}}{a_1 a_2 \sin^2 \alpha} = \frac{1}{a_2^2}$$

(II.) $$\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{a_1^2} + \frac{\cos 2 \pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}}{a_1 a_2 \sin \alpha} = \frac{1}{a_1 a_2}.$$

Diese beiden Forderungen für geradlinige Schwingung lassen sich leicht vereinigen.

Aus (II.) folgt nämlich

$$\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{a_1} = \frac{\sin \alpha - \cos 2 \pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}}{a_2 \sin \alpha}$$

Setzt man dies in (I.) ein, so erhält man nach geringen Umformungen

(α) $A_1 = a_1$, $A_2 = a_2$ (Amplitudengleichungen)

(β) $\cos 2 \pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda} = \mp 1$ (Rad. vect Gleichung)

als Bedingungsgleichungen für das Entstehen linearer Polarisationsschwingung.

Hiermit geht Gleichung (3) in die allgemeinste Form der Geradengleichung über, nämlich

$$\frac{\eta}{a_1} \pm \frac{\zeta}{a_2} = 0.$$

Die Bedingungsgleichung (β)

$$\cos 2 \pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda} = -1$$

zeigt, dass für alle Fälle, in denen

$$e_1 - e_2 = \frac{2n + 1}{2} \lambda$$

ist, linear polarisiertes Licht als resultierende Schwingung entsteht. Damit ist also bewiesen, dass in allen Interferenzpunkten auf den Hyperbelästen

mit ungeradzahligem Index jedes Teilchen des Lichtäthers eine geradlinige Bahn durchläuft. Da aber für jeden Punkt auf diesen Interferenzkurven wegen der Zugehörigkeit zu einer Hyperbel die Differenz der Entfernungen konstant ist, und zwar gleich einem ungeraden Vielfachen einer halben Wellenlänge, so geht daraus hervor, dass die oben aufgeworfene Frage, ob für alle Punkte der Interferenzkurven, ebenso wie für das Zusammentreffen eines Berges mit einem Tal, völlige Vernichtung beider Wellen stattfindet, zu bejahen ist.

Für die zweite Möglichkeit (β) geradliniger Schwingungen, nämlich

$$\cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda} = +1,$$

also

$$e_1 - e_2 = n\lambda$$

gilt Ähnliches.

Die Phasendifferenz wird O oder ein beliebiges Vielfache einer ganzen Wellenlänge in allen Punkten, in denen zwei Berge oder zwei Täler zusammentreffen. Für den geometrischen Ort derartiger Punkte lassen sich wieder wegen der Konstanz der Phasendifferenz hyperbolische Kurven nachweisen. Diese Hyperbeläste sind mit geradzahligen Indices bezeichnet. An den Stellen, wo die Entfernungen der Wellen von ihren Zentren einander gleich sind, der Mediane, gehen die Hyperbeläste in eine Doppelgerade über. Die genaue Konstruktion der geradlinigen Schwingungen ist auf Blatt II. Fig. (10) und (14) wiedergegeben und dann auf einige Punkte der

Fig. (7) übertragen. Man erkennt, dass auf den Hyperbeln mit ungeradzahligem Index die Länge der resultierenden Schwingungsbahn mit der Entfernung von der Axe abnimmt, dagegen auf den anderen Hyperbeln stetig wächst.

Es mögen nun die Bedingungen festgestellt werden, unter denen die resultierende Schwingung auf einer Kreisbahn verläuft, also gewissermassen zirkular polarisiertes Licht entsteht. In der vorliegenden Interferenzerscheinung fällt die Schwingungskurve in die Ebene, welche die beiden Strahlen in ihrem Durchschnittspunkte bilden. Durch dieses Merkmal unterscheidet sich das hier resultierende Licht von demjenigen, welches man gewöhnlich als zirkular polarisiert bezeichnet. Denn bei der eigentlichen Polarisation findet die kreisförmige bezw. elliptische Schwingung um einen Strahl in einer Ebene statt, die senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung steht. Es pflanzen sich hierbei zwei Wellen in einem und demselben Strahl fort. Eine Skizze mag diesen Unterschied deutlicher hervorheben.

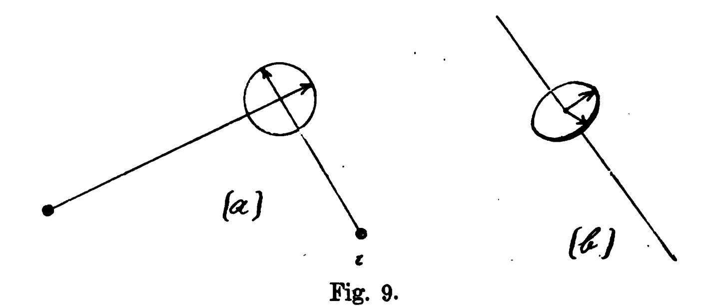


Fig. 9.

Fig. 9 (a) veranschaulicht den in vorliegender Aufgabe betrachteten Fall.

Fig. 9 (b) gibt das Bild für zirkulare bezw. elliptische Polarisation im gewöhnlichen Sinne.

Mit dieser Erkenntnis ist es wohl zulässig, hier kurz von zirkular- bezw. elliptisch-polarisiertem Licht zu sprechen.

Die allgemeine Bewegungsgleichung (1) für schiefwinklige Koordinaten geht in eine Kreisgleichung im rechtwinkligen System über, wenn sie die Form

$$(4) \qquad \left(\frac{\eta}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2 + 0 = \sin^2 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}$$

annimmt.

Hieraus ergibt sich ohne weiteres der Krümmungsradius r der Kreisschwingung, nämlich

$$5) \qquad r = a_1 \sin 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}.$$

Eine Gegenüberstellung der Kreisgleichung (4) und der allgemeinen Bahngleichung für das rechtwinklige Axenkreuz (2) führt zu den Bedingungsgleichungen für Zirkularpolarisation

$$(III.) \quad \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2 \sin^2\alpha} + \frac{2\cos\alpha}{a_1 a_2 \sin^2\alpha} \cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda} = \frac{1}{a_1^2}$$

und

$$(IV.) \qquad \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{a_1^2} + \frac{\cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}}{a_1 a_2 \sin\alpha} = 0$$

Setzt man aus (IV) den Wert für $\cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}$ in (III) ein, so entsteht

$$\frac{1}{a_2^2 \sin^2\alpha} - \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{a_1^2} = \frac{1}{a_1^2}.$$

Durch Multiplikation mit $a_1^2 \sin^2 \alpha$ erhält man die erste Bedingungsgleichung

(γ) $a_1 = a_2$ (Amplitudengleichung).

Neben dieser Forderung, Gleichheit der Amplituden, ergibt sich noch eine weitere. Mit (γ) geht nämlich (IV) über in

$$\cos \alpha = - \cos 2 \pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}.$$

Da ferner

$$\cos \alpha = \frac{e_1^2 + e_2^2 - d^2}{2 e_1 e_2}$$

ist, wo $d = C_1 C_2$, so wird die zweite Bedingungsgleichung

(δ) $\cos 2 \pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda} = \frac{d^2 - e_1^2 - e_2^2}{2 e_1 e_2}$ (Rad. vect. Gleichung).

Sind diese beiden Bedingungsgleichungen (γ) und (δ) erfüllt, so schwingen die Ätherteilchen der resultierenden Wellen stets in einer Kreisbahn.

Da

$$\cos \alpha = - \cos 2 \pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}$$

ist; also auch

$$\sin \alpha = \sin 2 \pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda},$$

so erhält man für die Gleichung des Krümmungsradius (5) die einfache Beziehung

$$r = a_1 \sin \alpha.$$

Ist der Winkel

$$\alpha = \frac{\pi}{2},$$

so wird der Krümmungsradius ein Maximum. Diese maximalen Kreisbahnen liegen auf dem Halbkreise

über $C_1 C_2$. Für diesen Fall wird auch die Bedingung (γ) Null, und es entsteht statt deren die Forderung

$$(\delta') \qquad \cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda} = 0$$

oder

$$e_1 - e_2 = \frac{2n+1}{4}\lambda.$$

Mit weiterer Annäherung bezw. Entfernung von der Axe nimmt sin α ab, sodass die Kreisschwingung sowohl auf der Zentrallinie, wie im Unendlichen in eine punktförmige Schwingung übergeht. Dieser Wechsel der Schwingungskreisbahn ist in der Zeichnung auf Blatt I, Figur 7 wiedergegeben. Es ist auch hier wieder für einen beliebig herausgegriffenen Fall auf Blatt II, Fig. 12 die Kreisbahn in grösserem Massstabe konstruiert. Um nun auf möglichst einfache Art alle derartigen Kreisschwingungspunkte rechnerisch festzustellen, mag folgender Weg eingeschlagen werden.

Nimmt man für die Phasendifferenz $e_1 - e_2$ einen beliebigen Wert, setzt also beispielsweise

$$e_1 - e_2 = u$$

und löst unter dieser Annahme die Bedingungsgleichung (δ) nach e_1 e_2 auf, so kann man leicht eine Form für e_1 und e_2 ermitteln, die neben bekannten Grössen allein von u abhängig ist. Aus (δ) folgt nämlich

$$4\, e_1\, e_2 \cos^2 \pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda} = d^2 - (e_1 - e_2)^2$$

Lässt man in dieser Forderung für die transzendente Kurve e_1 und e_2 zu ∞ werden, so wird

$$\cos^2\pi\frac{e_1 - e_2}{\lambda} = 0,$$

also

$$e_1 - e_2 = \frac{2n+1}{2}\lambda.$$

Diese Folgerung bedeutet, dass im Unendlichen für die transzendente Kurve der Distanzunterschied gleich dem ungeraden Vielfachen einer halben Wellenlänge wird. Da aber die gleiche Forderung

$$e_1 - e_2 = \frac{2n+1}{2}\lambda$$

auch für die Hyperbeln mit ungeradzahligem Index Gültigkeit hat, so beweist dies, dass der geometrische Ort aller Kreisschwingungspunkte eine transzendente Kurve ist, die sich asymptotisch dieser Hyperbel nähert. Da nun

$$e_1 e_2 = \frac{d^2 - u^2}{4\cos^2\pi\frac{u}{\lambda}}$$

ist und

$$\underline{e_1 - e_2 = u,}$$

so folgt daraus

$$e_1 + e_2 = \sqrt{u^2 + \frac{d^2 - u^2}{\cos^2\pi\frac{u}{\lambda}}}.$$

Durch Addition und Subtraktion der beiden letzten Gleichungen erhält man

$$(6)\quad \begin{cases} e_1 = \frac{u}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{u^2 + \frac{d^2 - u^2}{\cos^2\pi\frac{u}{\lambda}}} \\ e_2 = -\frac{u}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{u^2 + \frac{d^2 - u^2}{\cos^2\pi\frac{u}{\lambda}}} \end{cases}$$

In diesen beiden Gleichungen sind der Distanzunterschied und die Wellenlänge konstant. In der ausgeführten Zeichnung Blatt I Fig. 7 wurde

$$d = 3\,\lambda \text{ und } \lambda = 40 \text{ mm}$$

gewählt. Nimmt man jetzt verschiedene Werte für u an, so kann man leicht die dazugehörigen Werte von e_1 und e_2 berechnen und somit die geometrischen Orte der Kreisschwingungen zeichnerisch finden. Auf diese Weise ist nachstehende Tabelle für die beiden gezeichneten transzendenten Kurven zusammengestellt.

Linke transzendente Kurve.			Rechte transzendente Kurve.		
u [λ]	e_1 [mm]	e_2 [mm]	u [λ]	e_1 [mm]	e_2 [mm]
2	100	20	2	100	20
$\frac{75}{40}$	100,56	25,56	$\frac{85}{40}$	106,35	21,35
$\frac{72}{40}$	107,36	35,36	$\frac{90}{40}$	116,9	26,9
$\frac{69}{40}$	117,6	48,6	$\frac{92}{40}$	126	34
$\frac{67}{40}$	134,5	67,48	$\frac{93}{40}$	132,5	48,5
$\frac{66}{40}$	148,2	82,2	$\frac{95}{40}$	154,4	59,4
$\frac{65}{40}$	168,4	103,4	$\frac{96}{40}$	174	78
$\frac{64,5}{40}$	182	117,5	$\frac{96,5}{40}$	189,5	93
$\frac{64}{40}$	199,3	135,32	$\frac{97}{40}$	207,4	110,4
$\frac{63,5}{40}$	222	158,5	$\frac{97,25}{40}$	219,7	122,45

Mit Hülfe dieser Zahlengrössen sind die beiden Kurven in der Zeichnung Blatt I, Fig. 7 konstruiert. Nach der aufgestellten Formel (5) für den Krümmungsradius

$$r = a_1 \sin 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}$$

lassen sich nun auch die Grössenverhältnisse der resultierenden Kreisbahnen rechnerisch ermitteln. Unter der Annahme, dass die Amplitude

$$a_1 = 2 \text{ mm}$$

sei, wurden auf diese Weise die der Zeichnung eingefügten Kreisgrössen gefunden. Es mögen hier einige Werte tabellarisch zusammengestellt sein, weil sich daraus am besten sehen lässt, wie sich, von der Axe ausgehend, die punktförmige Schwingung zu einer maximalen Kreisbahn herausbildet, um von da an wieder einem Minimum zuzustreben.

In nachstehender Tabelle sind unter Nr. 6 die beiden maximalen Kreisschwingungen für beide Kurven aufgeführt. Die Werte von e_1 und e_2 wurden in diesen beiden Fällen nicht durch Abgreifen aus der Zeichnung entnommen, sondern nach den Formeln (6) berechnet. Den dazu als bekannt vorauszusetzenden Entfernungsunterschied u muss man nämlich, wie bereits oben festgestellt wurde, für die auf dem Halbkreis C_1 C_2 stattfindenden Zirkularschwingungen mit einem ungeraden Vielfachen einer Viertelwellenlänge in Rechnung setzen. Auf diese Weise wurden die übrigen Punkte zirkularer Schwingung ermittelt.

Nr.	Linke transzendente Kurve. e_1 [mm] abgemessen	e_2 [mm] abgemessen	u [λ] berechn.	$r = a_1 \sin 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}$ [mm]	Rechte transzendente Kurve. e_1 [mm] abgemessen	e_2 [mm] abgemessen	u [λ] berechn.	$r = a_1 \sin 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}$ [mm]
1.	100	20	2	0	100	20	2	0
2.	99,5	21,4	$\frac{78,1}{40}$	0,6	101,5	19,5	$\frac{82}{40}$	0,62
3.	99,7	23,7	$\frac{76}{40}$	1,2	104,4	19,8	$\frac{84,6}{40}$	1,32
4.	100,7	26,8	$\frac{73,9}{40}$	1,6	108	21	$\frac{87}{40}$	1,8
5	102,6	30	$\frac{72.6}{40}$	1,8	112	23,6	$\frac{88,4}{40}$	1,9
6.	112,299	46,299	$\frac{7}{4}$	2	116,94	26.9	$\frac{9}{4}$	2
7.	118,8	50	$\frac{68,8}{40}$	1,965	121	30	$\frac{91}{40}$	1,96
8.	130	62,6	$\frac{67,4}{40}$	1,8	130	37,5	$\frac{92,5}{40}$	1,85
9.	137,6	70	$\frac{66,88}{40}$	1,76	144,5	50	$\frac{94,5}{40}$	1,52
10.	150	81,2	$\frac{65,8}{40}$	1.58	150	55,3	$\frac{94,7}{40}$	1,48
11.	155.5	90	$\frac{65,5}{40}$	1,52	165,5	70	$\frac{95,5}{40}$	1,3
12.	170	105,5	$\frac{64.5}{40}$	1,3	170	74,3	$\frac{95,7}{40}$	1,25
13.	174,4	110	$\frac{64.4}{40}$	1,27	186	90	$\frac{96}{40}$	1,2
14.	190	125,7	$\frac{64,3}{40}$	1,25	190	93,4	$\frac{96,6}{40}$	1,02
15.	194	130	$\frac{64}{40}$	1,18	207	110	$\frac{97}{40}$	0,9

Im Vorstehenden wurden die Methoden für die Ermittlung aller linear- und zirkularpolarisierten Lichtpunkte erörtert; es erübrigt nun noch festzustellen, in welchen Bahnen die Ätherteilchen an den übrigen Orten des Feldes schwingen. Eine Untersuchung der allgemeinen Bahngleichung (1) zeigt, dass sie eine elliptische Kurve im schiefwinkligen Koordinatensystem darstellt. Man kann das leicht an Hand der transformierten Gleichung (2) nachweisen. Sie lautete

$$\left(\frac{\eta}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{a_1}\right)^2 \operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{2\zeta\eta}{a_1^2}\operatorname{ctg}\alpha + \left(\frac{\zeta}{a_2}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{2\zeta\eta}{a_1 a_2}\,\frac{\cos 2\pi\frac{e_1-e_2}{\lambda}}{\sin\alpha} + \frac{2\zeta^2}{a_1 a_2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\cos 2\pi\frac{e_1-e_2}{\lambda} = \sin^2 2\pi\frac{e_1-e_2}{\lambda}.$$

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades hat die Form

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Sie stellt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \gtreqless 0$$

ist.

Für die zu untersuchende Gleichung ist

$$a_{11}\,a_{22} = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{a_1^4} + \frac{1}{a_1^2 a_2^2 \sin^2\alpha} + \frac{2\cos\alpha\cos 2\pi\frac{e_1-e_2}{\lambda}}{a_1^3 a_2 \sin^2\alpha}$$

$$a_{12}^2 = \left(\frac{\text{ctg } a}{a_1^2} - \frac{\cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}}{a_1 a_2 \sin \alpha}\right)^2.$$

Mithin ist

$$A_{33} = \frac{\sin^2 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}}{a_1^2 a_2^2 \sin^2 \alpha} + \frac{4 \text{ cotg } \alpha \cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}}{a_1^3 a_2 \sin \alpha} > 0$$

Hieraus folgt, dass die allgemeine Bahngleichung eine Ellipse darstellt. Um für diese Schwingungsform einen beliebigen Spezialfall herauszugreifen, sei die Annahme gemacht

$$e_1 - e_2 = \frac{2n \pm 1}{8} \lambda$$

Durch Einsetzen dieser Grösse in die allgemeine Bahngleichung (1) entsteht

$$\left(\frac{y}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{z}{a_2}\right)^2 - \frac{2yz}{a_1 a_2} \cos \frac{2n \pm 1}{4} \pi = \sin^2 \frac{2n \pm 1}{4} \pi$$

oder

$$\left(\frac{y}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{z}{a_3}\right)^2 + \sqrt{2}\, 2 \frac{yz}{a_1 a_2} = \frac{1}{2}$$

Untersucht man diese Gleichung mittelst der obigen Methode auf ihre analytische Bedeutung hin, so erkennt man darin eine Ellipse.

Bei dem besonderen Fall

$$e_1 - e_2 = \frac{2n \pm 1}{4} \lambda$$

geht die Bahngleichung in die Grundform der Ellipse

$$\left(\frac{y}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{z}{a_2}\right)^2 = 1$$

über.

Diese Betrachtungen zeigen, dass zwei bipolar linear polarisierte in einer Ebene liegende Lichtwellensysteme im allgemeinen ein elliptisch polarisiertes, im besonderen, nämlich unter den oben ermittelten Bedingungen, ein linear und zirkular polarisiertes Licht erzeugen. Die Zeichnungen auf Blatt I und Blatt II zeigen den Übergang von der einen in die andere Schwingungsform und die Spezialkonstruktionen auf Blatt II geben der resultierenden Bahn noch einen Drehungssinn, sodass man rechts- und rückläufig polarisierte Lichtschwingungen unterscheidet.

VI.

Elliptische Polarisation auf dem Halbkreise über der Zentrallinie.

Es wurde festgestellt, dass alle geradlinigen Schwingungen auf Hyperbelästen liegen und ihre resultierende Grösse von der Axe aus zu- bezw. abnimmt. Diese Hyperbeln schneiden also auch den Halbkreis über der Zentrale, sodass auf ihm in diesen Schnittpunkten die resultierende Schwingung in geraden Linien verläuft.

Als geometrische Orte für die zirkularen Schwingungen wurden transzendente Kurven, die asymptotisch zu den Hyperbeln mit ungeradzahligem Index laufen, ermittelt. In ihren Schnittpunkten mit dem Zentralkreise ist die Kreisbahn am grössten.

Der Deutlichkeit halber sind diese Schwingungskurven auf Blatt III Fig. 15 in 1,5facher Grösse für einen Quadranten herausgezeichnet und einzeln konstruktiv durchgeführt. Man erkennt aus dieser Darstellung, dass es unter den vorliegenden Annahmen im ganzen 12 Punkte gibt, in denen die Maximalschwingung erzeugt wird. Der Übergang von den linearen zu den zirkularen Schwingungen ist auch erkenntlich. Derselbe

kann natürlich nach den obigen Ableitungen nur in elliptischen Bahnen vorsichgehen. Die Grösse dieser Ellipse wird sich je nach dem Distanzunterschiede $e_1 - e_2$ der Kreisform anschmiegen bezw. davon abweichen. Um nun zu erkennen, wann eine elliptische Kurve durchlaufen wird, seien noch einmal die Bedingungen für lineare und zirkulare Schwingungen auf dem Halbkreise niedergeschrieben und daraus eine Tabelle zusammengestellt. Nach Abschnitt V sind die Rad. vect. Gleichungen

(β) für die Gerade: $\cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda} = \pm 1$ oder

$$e_1 - e_2 = \frac{2n+2}{4} \lambda$$

(δ) für den Kreis: $\cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda} = 0$ oder

$$e_1 - e_2 = \frac{2n+1}{4} \lambda.$$

Tabellarisch ergibt sich für die lineare und zirkulare Schwingung auf dem Halbkreise folgende Aufstellung:

n	$\frac{2n}{4}\lambda$	$\frac{2n+1}{4}\lambda$	$\frac{2n+2}{4}\lambda$	$\frac{2n+3}{4}\lambda$	$\frac{2n+4}{4}\lambda$	$\frac{2n+5}{4}\lambda$	$\frac{2n+6}{4}\lambda$
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	2
2	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{4}$	3
	G.	K.	G.	K.	G.	K.	G.

Diese Tabelle zeigt einen vollkommen symmetrischen Bau. In den horizontalen Columnen wechseln Gerade (G) und Kreis (K) mit einander ab und jeder Wert differiert um $\frac{1}{4}\lambda$ gegen den anliegenden. In jeder Vertikalreihe dagegen findet stets dieselbe Schwingung statt, und zwei auf einander folgende Glieder unterscheiden sich um $\frac{1}{2}\lambda$. Die erste Horizontalreihe, in der $n = 0$ ist, gibt die Schwingungen und ihre Distanzunterschiede von dem Mittellot der Zentralen aus an. Da in allen dazwischen liegenden Punkten eine elliptische Bahn durchlaufen wird, so kann für das Auftreten der Ellipse folgende Ungleichung aufgestellt werden:

$$e_1 - e_2 < \frac{2n+1}{4}\lambda < m\lambda < \frac{2n+2}{4}\lambda.$$

Hierin ist also für n jede beliebige positive ganze Zahl und für m jeder zwischen beiden Werten liegende Zahlenfaktor zu setzen.

In der Zeichnung Blatt III, Fig. 15 sind einzelne Zwischenpunkte herausgegriffen und der Übersichtlichkeit halber die Konstruktion der elliptischen Bahnen auf einem zum Halbkreise konzentrischen grösseren Kreise ausgeführt.

Um für einen beliebig angenommenen Distanzunterschied

$$e_1 - e_2 = m\lambda$$

die Entfernungen e_1 und e_2 zu erhalten, wurde

folgender Weg eingeschlagen. Die Beziehung für den Halbkreis

$$e_1^2 + e_2^2 = d^2$$

und

$$e_1 - e_2 = m\lambda$$

ergeben eine quadratische Gleichung mit den Wurzeln

$$e_1 = \frac{m\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{2} - \frac{m^2\lambda^2}{4}}$$

$$e_2 = -\frac{m\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{2} - \frac{m^2\lambda^2}{4}}$$

In der vorliegenden Zeichnung ist der Zentralabstand

$$d = 3\lambda$$

angenommen, sodass man die beiden reellen Werte

$$e_1 = \frac{m\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2}\sqrt{18 - m^2}$$

und

$$e_2 = -\frac{m\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2}\sqrt{18 - m^2}$$

erhält.

Diese Gleichungen wurden angewandt, um für einen beliebigen Entfernungsunterschied leicht das zugehörige e_1 und e_2 zu berechnen und so die Ellipsenkonstruktion zu ermöglichen. Die Richtung der grossen und kleinen Axe einer jeden Ellipse liegt immer um 45° gegen die Richtung der Lichtstrahlen geneigt. Betrachtet man den Übergang von der Mediane bis zur übernächsten Hyperbel, so erkennt man den Wechsel des Drehungssinnes, d. h. dass bald rück- bald rechtsläufig polarisiertes Licht resultiert. —

VII.

Elliptische Polarisation unter der Annahme, dass sich die Amplituden mit der Entfernung von den Zentren ändern.

Am Ende des Abschnitts II b wurde bereits auf das quadratische Gesetz hingewiesen, das durch die Abhängigkeit der Lichtintensität von der Amplitude und der Entfernung von den Erregungszentren bedingt ist. Hiernach soll weiter in Betracht gezogen werden, dass die Amplituden durch die variablen Grössen $\frac{c^2}{e_1^2}$ und $\frac{c^2}{e_2^2}$ bestimmt werden, wobei vorausgesetzt werden muss, dass die Amplitudenquotienten $\frac{c^2 a_1}{e_1^2}$ und $\frac{c^2 a_2}{e_2^2}$ im freien Felde einen Einheitswert haben. Diesen Wert erhält man, wenn die Entfernung des Moleküls vom Zentrum

$$e_1 = c \text{ [cm] und } e_2 = c \text{ [cm]}$$

wird.

Mit diesen von der Entfernung abhängigen variablen Amplituden geht die allgemeine Bahngleichung (V. 1) in die Form über:

$$\left(\frac{y}{c^2 a_1 : e_1^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2 a_2 : e_2^2}\right)^2 - \frac{2 y z}{c^4 (a_1 a_2 : e_1^2 e_2^2)} \cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}$$
$$= \sin^2 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda}.$$

Diese Gleichung stellt im allgemeinen wieder eine Ellipse dar. Es fragt sich nun, ob das Zusammentreffen zweier Lichtstrahlen unter den gemachten Voraussetzungen auch wieder gerade und kreisförmige Schwingungen erzeugt. Zur Lösung dieses Problems sollen zuerst die Schwingungskurven auf dem Zentralhalbkreise untersucht werden, weil für diesen Ort die Strahlen rechtwinklig aufeinandertreffen.

Elliptische Polarisation auf dem Zentralhalbkreise.

Da die Konstante $c = 1$ cm gesetzt ist, nimmt die eben angegebene Bahngleichung folgende Gestalt an

$$(1) \quad \left(\frac{y}{a_1 : e_1^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{a_2 : e_2^2}\right)^2 - \frac{2\,y\,z}{a_1\,a_2 : e_1^2\,e_2^2} \cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda} = \sin^2 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda},$$

wobei naturgemäss e_1 und e_2, sowie λ in cm auszudrücken sind.

Diese Gleichung stellt eine Gerade dar, wenn

$$\cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda} = \pm 1$$

wird. Es entstehen somit für das Auftreten linearer Schwingungen die Bedingungsgleichungen

$$(\alpha) \quad A_1 = \frac{a_1}{e_1^2}, \quad A_2 = \frac{a_2}{e_2^2} \text{ (Amplitudengleichung)}$$

$$(\beta) \quad e_1 - e_2 = \frac{n}{2}\lambda \text{ (Rad. vect. Gleichung)}$$

Da die Rad. vect. Gleichung dieselbe ist, wie beim vorigen Fall ohne Berücksichtigung des quadratischen

Gesetzes der Entfernung, werden die geometrischen Orte linearer Schwingungen auch wieder Hyperbeln sein. Dagegen wird wegen der abweichenden Amplitudengleichung die Neigung der resultierenden Geraden zur Hyperbeltangente verschieden sein.

Die Bahngleichung (1) wird einen Kreis ergeben, wenn

$$\cos 2\pi \frac{e_1 - e_2}{\lambda} = o$$

ist und wenn die Amplitudenquotienten gleich sind. Man erhält dann folgende Bedingungsgleichungen für Zirkularpolarisation

$$(\gamma) \qquad \frac{a_1}{{e_1}^2} = \frac{a_2}{{e_2}^2} \text{ (Amplitudengleichung)}$$

$$(\delta) \qquad e_1 - e_2 = \frac{2n+1}{4}\lambda \text{ (Rad. vect. Gleichung)}$$

Zu diesen beiden Forderungen gesellt sich noch die Halbkreisbeziehung

$$(\varepsilon) \qquad {e_1}^2 + {e_2}^2 = d^2.$$

Für die mathematische Möglichkeit dieser drei Gleichungen ist den beiden Unbekannten e_1 und e_2 noch als dritte Bestimmungsgrösse das Amplitudenverhältnis $a_1 : a_2$ hinzuzufügen. Die Kombination von (δ) und (ε) ergibt

$$(2) \qquad \begin{aligned} e_1 &= \frac{2n+1}{8}\lambda + \sqrt{\frac{d^2}{2} - \left(\frac{2n+1}{8}\lambda\right)^2} \\ e_2 &= -\frac{2n+1}{8}\lambda + \sqrt{\frac{d^2}{2} - \left(\frac{2n+1}{8}\lambda\right)^2} \end{aligned}$$

Von dem doppelten Vorzeichen der Wurzeln ist das negative auszuschliessen, weil e_2 positiv bleibt.

In diesen beiden Gleichungen sind, wenn n angenommen wird, alle Grössen bekannt. Durch Vereinigung mit der Amplitudengleichung (γ) erhält man

$$(3)\quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{16\,d^2 + (2\,n + 1)\,\lambda\,\sqrt{32\,d^2 - (2\,n + 1)^2\,\lambda^2}}{16\,d^2 - (2\,n + 1)\,\lambda\,\sqrt{32\,d^2 - (2\,n + 1)^2\,\lambda^2}}$$

Nimmt man beispielsweise für a_2 einen bestimmten Zahlenwert, so erhält man die zugehörige Amplitude a_1. Mit diesen Einheitsgrössen von a_1 und a_2 kann man dann durch Kombination der Rad. vect. Gleichung (β) mit der Zentralkreisbeziehung (ε) und der Amplitudengleichung (α) die jeweiligen Amplitudengrössen der Linearschwingungen auf dem Halbkreise berechnen. Es mag nun unter folgenden Annahmen ein Beispiel durchgerechnet werden und darnach der besprochene Fall als Gegenstück zu Blatt III Fig. 15 graphisch dargestellt werden.

Unter der Annahme

$$d = 3\,\lambda$$
$$n = 0$$

wird nach Gleichung (3)

$$\frac{a_1}{a_2} = 1{,}2666 = \frac{19}{15}.$$

Wählt man

$$a_2 = 2\text{ mm},$$

so wird

$$a_1 = 2{,}5333\text{ mm}.$$

Diesen Einheitsamplituden sind alle folgenden Rechnungen zugrunde gelegt worden.

Aus den Beziehungen

$$\frac{e_1}{e_2} = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}$$

und

$$e_1 e_2 = \frac{d^2}{2} - \frac{(2n+1)}{32} \lambda^2$$

erhält man dann unter den gemachten Annahmen

$$e_1 = 2{,}2426\,\lambda$$

und aus der Bedingungsgleichung (δ)

$$e_2 = 1{,}9926\,\lambda.$$

Führt man wieder die Wellenlänge λ mit 4 cm in Rechnung, so werden die Entfernungen für die Kreisschwingung

$$e_1 = 8{,}97 \text{ cm},$$

$$e_2 = 7{,}97 \text{ cm}.$$

Zur Konstruktion des Kreises muss man seinen Krümmungsradius bestimmen. Unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen nimmt die Bahngleichung (1) die einfache Form

$$y^2 + z^2 = \left(\frac{a_1}{e_1^2}\right)^2$$

an. Hiernach ist der Krümmungsradius

$$r = \frac{a_1}{e_1^2}.$$

Für den vorliegenden Fall wird

$$r = 0{,}03176 \text{ mm}.$$

Zur Kontrolle kann $\frac{a_2}{e_2^2}$ berechnet werden.

Hieran mag sich der Berechnungsgang für die linearen Schwingungen anschliessen. Mit den Bedingungsgleichungen (α) und (β) nimmt die Bahn-

gleichung (1) die Gestalt einer geraden Linie an, nämlich

$$\frac{y}{a_1 : e_1^2} \pm \frac{z}{a_2 : e_2^2} = 0.$$

Sind die Abschnitte der Geraden auf den Koordinaten, also die jeweiligen Amplituden $\frac{a_1}{e_1^2}$ und $\frac{a_2}{e_2^2}$ ihrer Grösse nach ermittelt, so kann ihre Resultierende zeichnerisch gefunden werden, womit die Bahn der linearen Schwingung festgelegt ist. Die Entfernungen e_1 und e_2 können auf folgende Weise bestimmt werden. Aus der Bedingungsgleichung (β)

$$e_1 - e_2 = \frac{n}{2} \lambda$$

und der Halbkreisbeziehung

$$e_1^2 + e_2^2 = d^2$$

erhält man

$$e_1 = \frac{n\lambda}{4} + \sqrt{\frac{d^2}{2} - \frac{n^2 \lambda^2}{16}}$$

und wenn man wieder

$$d = 3\lambda$$

setzt

$$e_1 = \frac{\lambda}{4} (n + \sqrt{72 - n^2}).$$

Mit Hülfe dieser Gleichung kann man für jeden Wert von n die Entfernung ermitteln und dann aus der Beziehung (β) das zugehörige e_2. Für

$$n = 0,$$

also für die Mediane, wird

$$e_1 = e_2 = 2{,}1213\,\lambda$$

oder, wenn man wieder

$$\lambda = 4 \text{ cm}$$

setzt:

$$e_1 = e_2 = 8{,}49 \text{ cm}.$$

Mit den oben berechneten Einheitsamplituden werden dann die Abschnitte auf den Koordinaten

$$A_1 = \frac{a_1}{e_1^2} = 0.035185 \text{ mm}$$

und

$$A_2 = \frac{a_2}{e_2^2} = 0,02777 \text{ mm.}$$

Auf diese Weise lassen sich alle Punkte auf dem Zentralhalbkreise, in denen lineare Schwingungen erzeugt werden, berechnen und auch die Grösse der zugehörigen Amplituden angeben. Auf Blatt IV Fig. 16 ist die graphische Darstellung für einen Quadranten in 1,5 facher Vergrösserung gegeben, und es sind die resultierenden Geraden im Massstabe 50:1 konstruiert. Es ist ersichtlich, dass, wie bereits oben behauptet wurde, die linearen Bahnlinien zu ihren Komponenten nicht, wie im vorigen Falle, stets dieselbe Neigung von 45° haben, sondern, dass die Neigungswinkel von der Mediane aus nach den Zentren hin abnehmen. Um diese Abweichung klar hervortreten zu lassen, seien die Winkel berechnet, welche die Resultierende zu ihrem Rad. vect. e_1 einnimmt. Dieser Neigungswinkel i ist ausgedrückt durch

$$\text{tg } i = \frac{A_1}{A_2} = \frac{a_1 : e_1^2}{a_2 : e_2^2}.$$

Zur besseren Übersicht mögen für die verschiedenen Werte von n alle A_1 und A_2, sowie die Neigungswinkel i ihrer Resultierenden gegen e_1 abellarisch zusammengestellt sein.

n	A_1 [mm]	A_2 [mm]	∢ i gegen e_1
0	0,035185	0,027777	51° 42′ 37″
1	0,028511	0,036267	38° 10′ 21″
2	0,024122	0,051264	25° 11′ 58″
3	0,021177	0,082048	14° 28′ 22″
4	0,0 9212	0,16484	6° 38′ 52″
5	0,018025	0.58086	1° 46′ 39″

Es entsteht nun die Frage, welche Kurven in jenen Punkten durchlaufen werden, in denen auch die Entfernungsdifferenz, genau wie bei dem grundlegenden Kreise,

$$e_1 - e_2 = \frac{2n+1}{4} \lambda$$

ist, also an den Stellen, wo im früheren Falle ohne Berücksichtigung des quadratischen Gesetzes der Entfernung auch Kreise entstanden. Da die Distanzen e_1 und e_2 variabel sind, so gelten für diese Orte auf dem Zentralhalbkreise nur die beiden Bedingungsgleichungen (δ) und (ε), aber nicht (γ). Damit erhält die Bahngleichung (1) die Form

$$\left(\frac{y}{a_1 : e_1^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{a_2 : e_2^2}\right)^2 = 1.$$

Mithin entstehen in jenen Punkten statt der Kreise Ellipsen. Die jeweiligen Entfernungen e_1 und e_2 lassen sich mittelst der Gleichungen (2) berechnen, indem man für n die Werte 1, 2...5 setzt. Mit den Einheitsamplituden ergeben sich dann die Abschnitte A_1 und A_2 auf den Rad. vect. Die auf diese Weise ermittelten Werte mögen wieder tabellarisch zusammengestellt sein; in 50 facher Vergrösserung sind dann daraus auf

Blatt IV Fig. 16 die elliptischen Schwingungen konstruiert:

n	A_1 [mm]	A_2 [mm]
0	0,03176	0,03176
1	0,026102	0,042603
2	0,022512	0,063580
3	0,020091	0,111790
4	0,018528	0,275620
5	0,017708	2,16385

Die Zeichnung zeigt, dass die Ellipsen von der Kreisbahn ausgehend nach dem Zentrum zu immer flacher und langgestreckter werden. Die letzte nimmt eine solche Längsausdehnung an, dass sie in dem gewählten Massstabe nicht mehr gezeichnet werden konnte und deshalb nur ihr Mittelpunkt angegeben wurde. Die beiden ersten Ellipsen sind ausserhalb der Hauptzeichnung in 100 facher Vergrösserung mittelst der Zeitkreise konstruktiv durchgeführt. Dabei ergibt sich wieder, dass die Schwingungen abwechselnd rück- und rechtsläufig polarisiert sind.

An allen Punkten, die zwischen den gezeichneten Bahnen liegen, durchläuft das Licht, wie im ersten Falle elliptische Kurven, nur mit dem Unterschiede, dass die Ellipsen eine geneigte Lage haben.

Auf der anderen Halbkreishälfte entstehen ganz analoge Schwingungen.

Eine Untersuchung der Schwingungskurven im freien Felde würde keine wesentlich neuen Er-

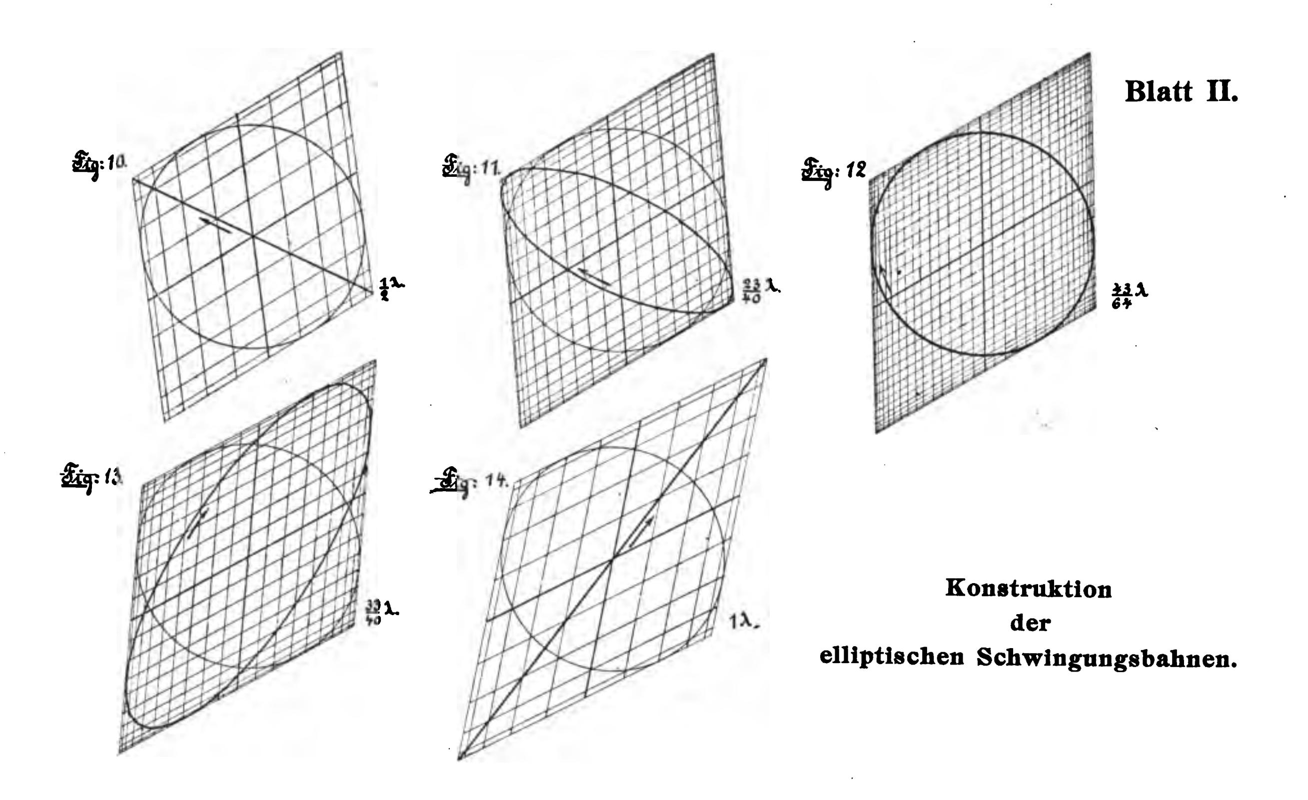
scheinungen ergeben. Als geometrischer Ort der linearen Schwingungen hatten sich bereits Hyperbeln mit gerad- bezw. ungeradzahligem Index erwiesen. Um die anderen Punkte des Feldes zu untersuchen, müsste man, von der allgemeinen Bahngleichung ausgehend, ähnliche Betrachtungen anstellen, wie im obigen Falle ohne Berücksichtigung des quadratischen Gesetzes der Entfernung. Es würde sich dabei herausstellen, dass überall elliptisch polarisiertes Licht erzeugt wird.

Zum Schluss mag bemerkt werden, dass sich die vorstehenden Untersuchungen und deren Ergebnisse ohne Änderung für die Voraussetzung der Interferenz zweier senkrecht polarisierter Lichtwellensysteme anwenden lassen mit dem Unterschiede, dass in diesem Falle sämtliche Schwingungskurven zur grundlegenden Ebene senkrecht stehen.

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. phil. et med. Matthiessen möchte ich auch an dieser Stelle für die gütige Überlassung des Themas und für das grosse Interesse, mit welchem er mich bei der Ausführung meiner Arbeit unterstützt hat, meinen Dank aussprechen.



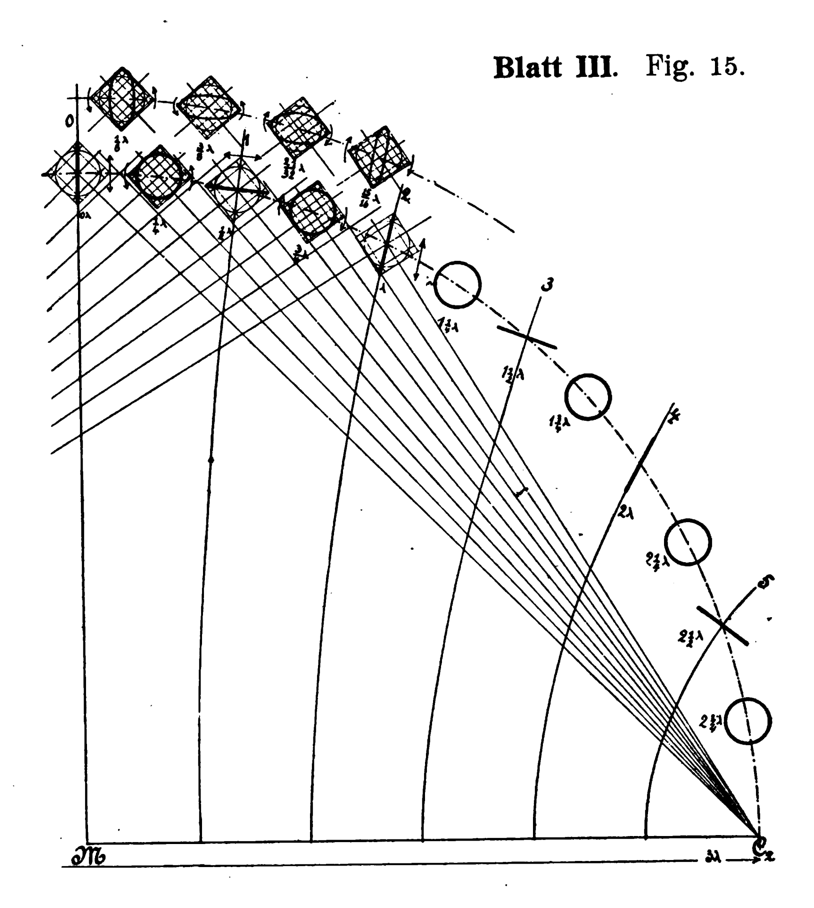
Blatt II.



**Konstruktion
der
elliptischen Schwingungsbahnen.**

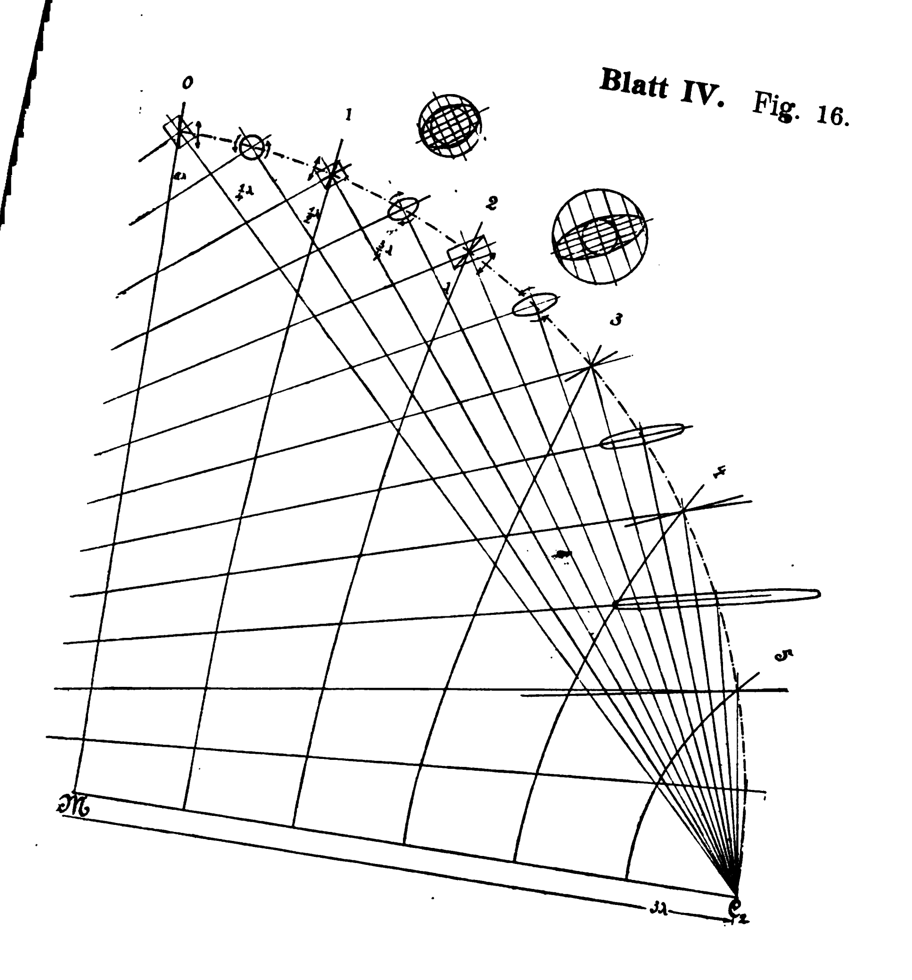

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF
CALIFORNIA

Blatt III. Fig. 15.




LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF
CALIFORNIA

Blatt IV. Fig. 16.




LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF
CALIFORNIA


QC445
V6
Voigt
166180

